

3. INTRODUCCIÓN.

Una solución analítica o solución exacta no comprende aproximación, si bien, se debe distinguir entre el problema real y el modelo matemático, siendo éste una representación idealizada del mismo. Las soluciones que se obtienen son soluciones de modelos matemáticos y por tanto dependerá de la precisión del modelo para que sea aplicable a la solución del problema real. Una solución aproximada de un modelo real de un supuesto puede ser más precisa que la solución exacta de un modelo matemático que no esté bien definido.

Los estudios requieren parámetros extensos con el fin de entender su influencia en relación a las variables sobre la solución y así estimar el conjunto correcto de variables para dar respuestas a preguntas que se puedan formular tratándose de un proceso iterativo que apoyados en los ordenadores y los métodos numéricos resultan adecuados para la estimación y resolver una amplia gama de preguntas mediante modificaciones de las variables de entrada. Actualmente no se concibe hacer un desarrollo de un problema sin los ordenadores y los métodos numéricos.

Algunos problemas se pueden resolver analíticamente, pero el procedimiento de solución es complejo y las expresiones resultantes de la solución son complicadas y tal vez no merezca la pena dicho esfuerzo de resolución, con la excepción de los problemas unidimensionales de estado estacionario o de los sistemas concentrados en régimen transitorio, todos los problemas de transferencia de calor llevan asociado las ecuaciones diferenciales parciales. La solución de estas ecuaciones requiere de las matemáticas (valores propios, transformadas de Fourier y Laplace, funciones de Bessel y de Legendre, series etc.).

Los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales se basan en resolver las ecuaciones diferenciales mediante ecuaciones algebraicas, como es el caso de las diferencias finitas que reemplaza las derivadas por diferencias.

Las partes fundamentales en que se compone el modelo de estudio son:

- Calentador.
- Regenerador.
- Enfriador.

- Cilindro de expansión.
- Cilindro de compresión.

Y por su interior se encuentra el fluido de trabajo. A este fluido de trabajo se le aplica calor mediante el calentador y se hace que libere calor mediante el enfriador, estando éste en contacto con un fluido en movimiento a menor temperatura que la fuente que le suministra calor al calentador y a menor temperatura que el fluido de trabajo con el fin que el calor aportado al sistema sea liberado en la medida demandada.

Por otra parte, estos cinco componentes son sólidos que están en contacto con el fluido de trabajo.

Al considerar el ciclo termodinámico el sistema está sometido a dos procesos isotérmicos y esta condición se aplica mediante el enfriador y el calentador, sin embargo, las condiciones de temperatura pueden variar a lo largo del tiempo, ya que si alteramos la temperatura superficial del sistema, debido al movimiento del fluido de trabajo, la temperatura en cada punto del sistema comenzará a cambiar, los tubos del calentador están sometidos a una temperatura superior en su pared superficial que está en contacto con el reservorio de calor y la superficie de los tubos del calentador que está en contacto con el fluido de trabajo se le somete a la temperatura que se encuentre el fluido de trabajo siendo esta temperatura menor que la de los tubos del calentador ya que se tiene que calentar el fluido, por lo que se dará la existencia de una transferencia de calor por convección desde el reservorio de calor a la superficie exterior de los tubos del calentador, y entre ambas superficies de los tubos del calentador se transferirá calor por conducción y desde la superficie interior de los tubos del calentador que encierra al fluido de trabajo se transferirá calor por convección y el fluido de trabajo se calentará por convección. Análogamente ocurrirá en el proceso del enfriador con el fluido de trabajo. Se transfiere la energía por convección tanto en el enfriador como en el calentador desde el fluido de trabajo y hacia el fluido de trabajo respectivamente. Los cambios continuarán ocurriendo hasta que se alcance una nueva distribución de temperatura de estado estable, pero el fluido se desplazará a lo largo de todo el sistema lo que hará difícil la consideración de encontrar una distribución de temperatura estable hasta que el fluido de trabajo esté en estado de reposo, o próximo a este estado, además el fluido de trabajo está sometido a gran variación de temperatura y a la continua

expansión y compresión que lo somete los pistones. La variación de temperatura de este fluido de trabajo está relacionada con el tiempo y la posición donde se encuentra, si bien el sistema es cerrado pero presenta variaciones de volumen debido a los cambios frecuentes en su temperatura, así como a fuerzas externas a las que el sistema es sometido.

La energía que también se transfiere por conducción, intentará alcanzar el equilibrio ya que ocurre esta transferencia de calor por conducción del interior de los tubos del calentador a la superficie que se encuentra en contacto con el fluido de trabajo y desde la superficie que se encuentra el fluido de trabajo hacia el interior de los tubos del enfriador y desde ambos interiores a su otra superficie. También la conducción se dará entre las distintas partes y en las mismas partes que componen el sistema de estudio. En el proceso transitorio de calentamiento o enfriamiento que tiene lugar en el tiempo intermedio antes de alcanzarse el equilibrio, hay que tener en cuenta la variación de la energía interna del sólido con el tiempo y las condiciones de contorno deben de ajustarse para establecer la condición física que se impone.

Consideración similar la tendrá el regenerador y los cilindros de compresión y expansión.

3.1. MODELO DE CAPACIDAD TÉRMICA GLOBAL.

Debido al desplazamiento del fluido de trabajo las partes sólidas del sistema de estudio experimentan un cambio debido al ambiente térmico al que están sometidas.

La pared superficial exterior de los tubos del calentador estará caliente a una temperatura T_i y se le someterá a la temperatura del fluido de trabajo al igual que podrá ocurrir con el regenerador, estando éste a otra temperatura diferente.

La pared superficial de los tubos del calentador estará a una temperatura T_i y esta permanecerá así debido al reservorio de calor existente, mientras que el fluido de trabajo aumentará su temperatura hasta una temperatura T_∞ llegando a ser este valor menor que T_i , al observar el regenerador, la superficie exterior de la malla estará a menor temperatura que la del fluido si comenzamos con un tiempo $t = 0$, la temperatura de la superficie exterior de la malla aumentará debido a la transferencia de calor por

convección con el fluido de trabajo para el $t > 0$ hasta que esté próxima a la temperatura del fluido de trabajo T_{∞} .

La esencia del método de resistencia interna despreciable es la suposición de que la temperatura en el sólido es especialmente uniforme en cualquier instante durante el proceso transitorio y esto supone gradientes de temperaturas en el sólido insignificantes. En nuestro caso, existe un gradiente muy acusado y es en el regenerador.

La conducción del calor sin gradiente de temperatura y en consideración con la Ley de Fourier hace la existencia de una conductividad térmica infinita, siendo esto no posible, si bien, aunque esta condición no se satisfaga de forma exacta se aproxima mucho si la resistencia a la conducción en el calentador, regenerador, enfriador y cilindros de expansión y compresión es pequeña comparada con la resistencia a la transferencia de calor entre estos y el fluido de trabajo.

Al no considerar los gradientes de temperatura en el calentador, regenerador, enfriador, y cilindros, se realiza un balance global de energía el cual relaciona la velocidad de pérdida de calor en la superficie de las partes sólidas con la rapidez del cambio de energía interna.

El problema se resolvería aplicando la ecuación de la conservación de la energía.

Que por ejemplo, a un volumen de control de una parte sólida en contacto con el fluido de trabajo, tendríamos.

$$-\dot{E}_{\text{sale}} = \dot{E}_{\text{alm}} \quad (3.1.1)$$

$$-hA_s(T - T_{\infty}) = \rho Vc \frac{dT}{dt} \quad (3.1.2)$$

Tomando la diferencia de temperaturas como:

$$\theta \equiv T - T_{\infty} \quad (3.1.3)$$

Considerando que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt} \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\rho V c}{h A_s} \frac{d\theta}{dt} = -\theta \quad (3.1.5)$$

Al separar las variables tenemos, desde una condición inicial para la que $t=0$ y $T(0)=T_i$, tenemos:

$$\frac{\rho V c}{h A_s} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_{0 \rightarrow t} dt \quad (3.1.6)$$

$$\theta_i = T_i - T_\infty \quad (3.1.7)$$

$$t = \frac{\rho V c}{h A_s} \text{Ln} \frac{\theta_i}{\theta} \quad (3.1.8)$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left[-\left[\frac{h A_s}{\rho V c}\right]t\right] \quad (3.1.9)$$

Por lo que podemos estimar el tiempo que se requiere para alcanzar una temperatura T en la parte sólida, o bien la temperatura que alcanzaría la parte sólida en el tiempo t .

Se deduce que la diferencia de temperaturas del sólido de estudio y el fluido decaen exponencialmente a cero conforme t se aproxima a infinito.

También se interpreta como una constante térmica del tiempo que expresamos como:

$$\tau_i = \left(\frac{1}{h A_s}\right)(\rho V c) = R_t C_t \quad (3.1.10)$$

Cualquier aumento en R_t (resistencia a la transferencia de calor por convección) y C_t (resistencia interna despreciable del sólido) ocasionará que un sólido responda más lentamente a cambios en su ambiente térmico ($\theta = 0$)

Para determinar la transferencia total de energía Q que tiene lugar hasta algún tiempo t ,

$$Q = \int_{0 \rightarrow t} q dt = hA_s \int_{0 \rightarrow t} \theta dt \quad (3.1.11)$$

al sustituir θ e integrar tenemos:

$$Q = \rho V c \theta_i [1 - \exp(-\frac{t}{\tau_i})] \quad (3.1.12)$$

Como:

$$-Q = \Delta E_{alm} \quad (3.1.13)$$

Que se interpreta que para el templado Q es positiva y el sólido experimenta una disminución de energía interna y si el sólido se calienta Q es negativa y la energía interna del sólido aumenta.

Como el numero de Biot:

$$Bi = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{hL}{k} \quad (3.1.14)$$

proporciona una medida de la caída de temperatura en el sólido en relación con la diferencia de temperaturas entre la superficie y el fluido, para valores de $Bi \ll 1$, es razonable pensar que una distribución de temperaturas uniforme a través de un sólido en cualquier momento durante un proceso transitorio. La resistencia a la conducción en el sólido es mucho menor que la resistencia a la convección a través de la capa límite de fluido.

Si el número de Biot:

$$Bi = \frac{hL_c}{k} < 0.1 \quad (3.1.15)$$

El error asociado con este método es de la resistencia interna despreciable es pequeño. La relación entre el volumen del sólido y el área de la superficie es la longitud característica:

$$L_c = \frac{V}{A_s} \quad (3.1.16)$$

No obstante, L_c debe asociarse con la escala de longitud que corresponde a la diferencia máxima de temperaturas espaciales.

También tenemos que:

$$\frac{hA_s t}{\rho V c} = \frac{ht}{\rho c L_c} = \frac{hL_c}{k} \frac{k}{\rho c L_c^2} = \frac{hL_c}{k} \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (3.1.17)$$

$$\frac{hA_s t}{\rho V c} = \text{BiFo} \quad (3.1.18)$$

$$\text{Fo} = \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (3.1.19)$$

Que se denomina número de Fourier, que es un tiempo sin dimensión, que junto con el número de Biot, se caracteriza los problemas de conducción transitoria.

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-\text{BiFo}) \quad (3.1.20)$$

en su ambiente térmico La temperatura puede considerarse uniforme, en dicho caso el sistema de estudio está idealizado, ya que en el material debe de existir un gradiente de temperatura si el calor va a ser conducido hacia dentro o hacia fuera del material. A menor tamaño físico más realista será la hipótesis de temperatura uniforme en el mismo, en el límite podría emplearse un volumen diferencial como en la obtención de la ecuación general de la conducción del calor. Este análisis supone que la resistencia interna del sólido en estudio es despreciable en comparación con la resistencia externa. (Resistencia a la transferencia de calor por conducción pequeña comparada con la resistencia convectiva en la superficie).

3.2. EFECTOS ESPACIALES.

Cuando no es favorable el método de la resistencia interna despreciable se emplea un método alternativo y por consiguiente nos enfrentamos al hecho que los gradientes dentro del medio no son insignificantes.

Los problemas de conducción transitoria se formulan mediante la ecuación del calor y la solución a esta ecuación diferencial proporciona la variación de la temperatura con el tiempo y con las coordenadas espaciales.

Para una coordenada espacial, sin generación de energía interna y con una conductividad constante, la ecuación de difusión del calor en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2.1)$$

nos queda:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (3.2.2) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2.3)$$

Para resolver esta ecuación la distribución de temperaturas $T(x,t)$ hay que especificar una condición inicial y dos condiciones de frontera.

Una condición de frontera típica:

$$T(x,0) = T_i \quad (3.2.3)$$

Y como condiciones de fronteras:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.2.4)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h [T(L,t) - T_\infty] \quad (3.2.5)$$

Por lo que se supone una distribución de temperaturas uniforme en el tiempo, un requerimiento de simetría para el plano medio y se establece la condición de superficie para el tiempo.

Por lo que la distribución de temperaturas en la pared, además de depender de x y t , dependen de más parámetros físicos, como:

$$T = T(x, t, T_i, T_\infty, L, k, \alpha, h) \quad (3.2.6)$$

La ecuación se resuelve o de forma numérica o de forma analítica.

Al adimensional, considerando la diferencia de temperaturas entre la máxima diferencia de temperaturas tenemos:

$$\theta^* \equiv \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (3.2.7)$$

En donde $0 \leq \theta^* \leq 1$, y al definir una coordenada espacial como $x^* = \frac{x}{L}$, en donde L es la mitad del espesor de pared y definiendo el tiempo adimensional como:

$$t^* \equiv \frac{\alpha t}{L^2} \equiv Fo \quad (3.2.8)$$

Y al sustituir, la ecuación se convierte en:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo} \quad (3.2.9)$$

Con las condiciones inicial y de frontera:

$$\theta^*(x^*, 0) = 1 \quad (3.2.10)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = 0 \quad (3.2.11)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = -Bi\theta^*(1, t^*) \quad (3.2.12)$$

Y la dependencia funcional se expresa como:

$$\theta^* = f(x^*, Fo, Bi) \quad (3.2.13)$$

Por lo que al emplear la solución adimensional no depende de los valores

$$T_i, T_\infty, L, k, \alpha, h.$$

3.3. SISTEMAS RADIALES CON CONVECCIÓN.

Para un cilindro infinito de radio r_0 que está a una temperatura inicial uniforme y experimenta un cambio en las condiciones de convección, es posible una solución en serie exacta para la dependencia con respecto al tiempo de la distribución radial de temperaturas, teniendo en cuenta la aproximación de un término para la mayoría de las condiciones.

El cilindro infinito es una idealización que permite la suposición de conducción unidimensional en la dirección radial. La aproximación es razonable cuando

$$\frac{L}{r_0} \geq 10 \quad (3.3.1)$$

3.3.1. SOLUCIONES EXACTAS

Cilindro infinito:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo) J_0(\zeta_n r^*) \quad (3.3.2)$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{r_0^2} \quad (3.3.3)$$

$$C_n = \frac{2}{\zeta_n} \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0^2(\zeta_n) + J_1^2(\zeta_n)} \quad (3.3.4)$$

Los valores característicos de ζ_n son las raíces positivas de la ecuación trascendental.

$$\zeta_n \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0(\zeta_n)} = Bi \quad (3.3.5)$$

Las cantidades J_1 y J_0 son funciones de Bessel de primera clase y sus valores se tabulan, también están tabuladas las raíces por Scheider de la ecuación trascendental.

3.3.2. SOLUCIONES APROXIMADAS.

Para el cilindro infinito las soluciones en series anteriores se aproximan mediante un término, $Fo > 0.2$, por lo que la dependencia respecto del tiempo de la temperatura en cualquier lugar dentro del sistema radial es la misma que la de la línea central.

Cilindro Infinito:

La aproximación de un término:

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) J_0(\zeta_1 r^*) \quad (3.3.6)$$

O bien,

$$\theta^* = \theta_0^* J_0(\zeta_1 r^*) \quad (3.3.7)$$

Donde θ_0^* representa la temperatura de la línea central y es de la forma:

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \quad (3.3.8)$$

Los valores de C_1 y ζ_1 están determinados y están dados de forma tabuladas para un rango de números de Biot.

3.3.3. TRANSFERENCIA TOTAL DE ENERGÍA.

Se realiza un balance de energía para determinar la transferencia total de energía del cilindro infinito en el intervalo de tiempo $\Delta t = t$, sustituyendo las soluciones aproximadas y con la introducción de:

$$Q_0 = \rho c V (T_i - T_\infty) \quad (3.3.9)$$

Resulta para el cilindro infinito:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2\theta_0^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1) \quad (3.3.10)$$

Expresiones cuyos resultados son útiles para predecir la respuesta transitoria de cilindros largos sujetos a un cambio súbito en la temperatura de la superficie. Se establece un número de Biot infinito, y la temperatura del fluido T_∞ , se reemplaza por la temperatura constante de la superficie T_s .

3.4. SÓLIDO SEMIINFINITO.

Otra geometría simple para la que es posible obtener soluciones analíticas es el sólido semiinfinito. El sólido se extiende hasta el infinito en todas sus direcciones excepto en una y se caracteriza por una sola superficie identificable.

Si se impone un cambio súbito de condiciones en la superficie, ocurrirá una conducción unidimensional dentro del sólido.

Con este método se proporciona una idealización útil para los problemas prácticos.

La condición de frontera interior es:

$$T(x \rightarrow \infty, t) = T_i \quad (3.4.1)$$

Para el caso de temperatura superficial constante se obtiene al reconocer la existencia de una variable de similitud η , mediante la cual se transforma la ecuación del calor en una ecuación diferencial parcial. Que incluye dos variables independientes (x y t), a una ecuación diferencial ordinaria expresada en términos sólo de la variable de similitud.

Para confirmar que la variable:

$$\eta \equiv \frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}} \quad (3.4.2)$$

Satisface este requisito, transformamos primero los operadores de la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}} \frac{dT}{d\eta} \quad (3.4.3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4\alpha t} \frac{d^2 T}{d\eta^2} \quad (3.4.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{2t(4\alpha t)^{1/2}} \frac{dT}{d\eta} \quad (3.4.5)$$

Que al sustituir en la ecuación del calor en una dimensión sin generación de calor y con conductivita térmica constante, tenemos:

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} = -2\eta \frac{dT}{d\eta} \quad (3.4.6)$$

Con $x=0$ en concordancia con $\eta = 0$, la condición de superficie se expresa como:

$$T(\eta = 0) = T_s \quad (3.4.7)$$

Con $x \rightarrow \infty$ así como $t=0$ que corresponde con $\eta \rightarrow \infty$, la condición inicial y la condición de frontera inicial corresponde al requerimiento:

$$T(\eta \rightarrow \infty) = T_i \quad (3.4.8)$$

Como la ecuación transformada y las condiciones iniciales/frontera son independientes de x , t .

$$\eta = \frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}} \quad (3.4.9)$$

Es una variable de similitud.

Su existencia implica que la forma de distribución de temperaturas en el medio, $T(x)$, es independiente del tiempo y que, sin tener en cuenta los valores de x , t , la temperatura se representa como una función de η .

Al realizar la integración y considerando que $\text{erf } \eta$ es una función matemática llamada gaussiana de error,

Se tiene:

Para temperatura superficial constante:

$$T(0,t)=T_s \quad (3.4.10)$$

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (3.4.11)$$

$$q''_s(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$

Para flujo superficial de calor constante:

$$q''_s = q''_0 \quad (3.4.12)$$

$$T(x,t) - T_i = \frac{2q''_0(\alpha t/\pi)^{1/2}}{k} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{q''_0 x}{k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (3.4.13)$$

Para el caso de flujo de calor superficial: $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0,t)] \quad (3.4.14)$

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha t}{k^2}\right)\right] \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)\right] \quad (3.4.15)$$

La función complementaria de error, $\operatorname{erfc} w$ se define como $w=1- \operatorname{erf} w$.

Para más información sobre este método nos podemos remitir a la referencia.

3.5. EFECTOS MULTIDIMENSIONALES.

En un cilindro cuando la longitud y el diámetro son comparable, la transferencia de calor por conducción es significativa para las direcciones de coordenadas r y x , por lo que la temperatura dentro del cilindro dependerá de r , x , t .

Si las propiedades son constantes y no existe generación de energía la ecuación del calor se puede expresar como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.5.1)$$

Donde x designa la coordenada axial. La solución se expresa como:

$$\frac{T(r, x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \Big|_{\text{pared plana}} \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \Big|_{\text{cilindro infinito}} \quad (3.5.2)$$

Siendo la solución bidimensional como el producto de soluciones unidimensionales que corresponden a la pared plana de espesor $2L$ y un cilindro infinito de radio r_0 . Para $Fo > 0.2$, estas soluciones son proporcionadas por las aproximaciones vistas anteriormente.

3.6. MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

Las soluciones analíticas a problemas transitorios se restringen a geometrías simples y a condiciones de frontera, como las que hemos visto anteriormente. En nuestro caso, tanto la geometría y las condiciones de fronteras hacen que el empleo de las técnicas analíticas sea bastante complejo a la hora de abordar el problema que planteamos, por lo que recurriremos al método de diferencias finitas.

En nuestro caso tenemos una geometría más complicada ya que se presenta un estudio con todas las partes integrantes que forman el motor (cilindros de expansión y compresión, calentador, regenerador y enfriador) y además sometido a un ciclo termodinámico, lo que hará cambiar las condiciones de frontera a las que está sometida el sólido, ya que el fluido de trabajo está sometido a compresiones por los pistones y a expansión debido al aporte de calor. Por otra parte en el generador se deben dar gradientes de temperaturas significativos ya que en un extremo estará a una temperatura superior al fluido de trabajo que circula por el enfriador y en el otro extremo estará a una temperatura inferior al fluido de trabajo que circula el calentador, además el regenerador está sometido continuamente a la corriente de flujo y se producirá intercambio de calor por convección entre el fluido y el regenerador, por otra parte también en el mismo regenerador habrá transferencia de calor por conducción.

3.6.1. FORMULACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS.

Sea una función f que depende de x , la derivada de $f(x)$ en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto y se define como:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.6.1)$$

Haciendo una aproximación tenemos:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.6.2)$$

Esta expresión aproximada de la derivada en términos de diferencias es la forma aproximada en diferencias finitas de la primera derivada.

Por otra parte, al escribir la serie de Taylor de la función f en torno al punto x ,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \dots \quad (3.6.3)$$

Al desprestigiar todos los términos del desarrollo, excepto los dos primeros. El primer término es proporcional a Δx^2 y, por tanto, el error en que se incurre en cada paso de esta aproximación también es proporcional a Δx^2 . Sin embargo, el error en que se incurre después de M pasos en la dirección de la longitud L es proporcional a Δx , ya

$$\text{que } M\Delta x^2 = \frac{L}{\Delta x} \Delta x^2 = L\Delta x \quad (3.6.4)$$

Por lo que cuanto menor sea Δx , menor es el error y, de este modo, más exacta la aproximación.

Consideremos la conducción de calor unidimensional en estado estacionario en una pared plana de espesor L , con generación de calor. La pared se divide en M secciones de espesor $\Delta x = L/M$, en la dirección x , separadas por planos que pasan por los $M+1$ puntos $0,1,2,3,\dots,m-1, m, m+1, \dots,M$, llamados nodos o puntos nodales. La coordenada x de cualquier punto m es $x_m = m\Delta x$ y la temperatura en ese punto es $T(x_m)=T_m$. La ecuación de conducción de calor comprende las segundas derivadas de la temperatura respecto a las variables espaciales, tales como d^2T/dx^2 y la formulación de diferencia finitas se basa en el reemplazo de las segundas derivadas por diferencias apropiadas. Se necesita por tanto iniciar el proceso con las primeras derivadas de la temperatura dT/dx , en los puntos medios $m-1/2$ y $m+1/2$ de las secciones que están a uno y otro lado del nodo m .

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{m-1/2} \approx \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x} \quad (3.6.5)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{m+1/2} \approx \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \quad (3.6.6)$$

Como la derivada segunda es la derivada de la primera derivada, la segunda derivada en el nodo m se puede expresar como:

$$\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_m \approx \frac{\left. \frac{dT}{dx} \right|_{m+1/2} - \left. \frac{dT}{dx} \right|_{m-1/2}}{\Delta x} = \frac{\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} - \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \approx \frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} \quad (3.6.7)$$

Expresión que representa en diferencias finitas la segunda derivada en un nodo interno general m . La segunda derivada de la temperatura en el nodo m se expresa en términos de las temperaturas en el nodo m y sus dos nodos vecinos.

Por lo que la ecuación diferencial de la transferencia de calor unidimensional en estado estacionario en una pared plana, con generación de calor y conductividad térmica constante, se puede expresar en forma de diferencias finitas como:

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{e}_m}{k} = 0, \quad m=1,2,3,\dots,M-1 \quad (3.6.8)$$

Donde \dot{e}_m es la razón de generación de calor por unidad de volumen en el nodo m. Si se especifican la temperaturas superficiales T_0 y T_M , la aplicación de esta ecuación a cada uno de los M-1 nodos interiores conduce a M-1 ecuaciones para la determinación de M-1 temperaturas desconocidas en los puntos interiores. La solución de estas ecuaciones da lugar a las temperaturas en su respectivo nodo. Si no se conocen las temperaturas en las superficies exteriores, entonces se necesitan dos ecuaciones más de manera semejante mediante las condiciones de frontera. Se obtienen así las temperaturas desconocidas en los M+1 nodos al resolver el sistema de ecuaciones de M+1 ecuaciones con las M+1 incógnitas.

La formulación en diferencias finitas se extiende con facilidad a problemas bidimensionales o tridimensionales de transferencia de calor al reemplazar la segunda derivada por una ecuación en diferencias finitas en esa dirección. Así para la conducción bidimensional en estado en una región con generación de calor y conductividad térmica constante se puede expresar en coordenadas rectangulares como:

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{e}_{m,n}}{k} = 0 \quad (3.6.9)$$

Expresión en la que para $m=1,2,3,\dots,M-1$ y $n=1,2,3,\dots,N-1$, en cualquier nodo interior (m,n).

La región se ha dividido en M partes iguales en la dirección x y en N partes iguales en la dirección y teniendo un total de (M+1)(N+1) nodos y se puede emplear esta expresión para obtener las ecuaciones en diferencias finitas en (M-1)(N-1) de estos nodos menos los de frontera. Usaremos el procedimiento del balance de energía para obtener la formulación numérica y de esta forma se pueden manejar las condiciones de fronteras con mayor facilidad.

El método del balance de energía se basa en la división del medio en un número suficiente de elementos de volumen y aplicar un balance de energía en cada elemento. En principio se seleccionan los puntos nodales en los cuales se pretende estimar las temperaturas y a continuación se forman los elementos o volúmenes de control sobre los nodos y trazar rectas que pasen por los puntos medios entre nodos, de esta forma, los nodos interiores se mantienen a la mitad de los elementos, y las propiedades en el nodo, como la temperatura y la velocidad de generación de calor, representan las propiedades promedio del elemento. A veces resulta conveniente pensar en la temperatura como si variara linealmente entre los nodos, en especial al expresar la conducción de calor entre los nodos mediante la ley de Fourier en el caso de conducción.

Si consideramos una región en la cual la conducción del calor es significativa en las direcciones x e y , y se encuentra dividida en una malla de puntos nodales de espacios Δx y Δy , en las direcciones x e y respectivamente y una profundidad unitaria $\Delta z = 1$ en la dirección z .

Si consideramos que $m=0,1,2,3,\dots,M$ es el conteo de los nodos en la dirección x y $n=0,1,2,3,\dots,N$ es el conteo de los nodos en la dirección y . Las coordenadas del nodo (m,n) son simplemente $x = m\Delta x$ y $y = n\Delta y$, y la temperatura en el nodo (m,n) se denota por $T_{m,n}$.

El elemento de volumen $\Delta x\Delta y l$ con centro en un nodo interior general (m,n) , en una región en la que el calor se genera con una razón de \dot{q} y con una conductividad térmica constante k , y suponiendo que la dirección de la conducción de calor es hacia el nodo que se está considerando, en todas las superficies, el balance de energía sobre el elemento de volumen se expresa como:

$$(\text{Razón de la conducción de calor en las superficies izquierda, superior, derecha e inferior}) + (\text{razón de la generación de calor dentro del elemento}) = (\text{Razón de cambio del contenido de energía del elemento}).$$

Lo que nos queda:

$$\dot{Q}_{\text{cond.izquierda}} + \dot{Q}_{\text{cond.superior}} + \dot{Q}_{\text{cond.derecha}} + \dot{Q}_{\text{cond.inferior}} + \dot{E}_{\text{gen,elemento}} = \frac{\Delta E_{\text{elemento}}}{\Delta t} = 0 \quad (3.6.10)$$

En caso de ser estacionario.

Si se supone que las temperaturas en los nodos adyacentes varían linealmente y que el área de transferencia de calor es $A_x = \Delta y l = \Delta y$ en la dirección x y $A_y = \Delta x l = \Delta x$ en la dirección y, la relación del balance de energía aplicada es:

$$k\Delta y \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} + k\Delta y \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} + \dot{e}_{m,n} \Delta x \Delta y = 0 \quad (3.6.11)$$

Que al dividir cada término entre $\Delta x \Delta y$ simplificando, nos queda:

$$\frac{T_{m-1,n} - 2T_{m,n} + T_{m+1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n-1} - 2T_{m,n} + T_{m,n+1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{e}_{m,n}}{k} = 0 \quad (3.6.12)$$

Para $m=1,2,3,\dots,M-1$ y $n=1,2,3,\dots,N-1$

La región con M nodos igualmente espaciados en la dirección x y con N nodos igualmente espaciados en la dirección y tiene un total de $(M+1)(N+1)$ nodos y se puede emplear esta ecuación en diferencias finitas en todos los nodos interiores.

Si las magnitudes de los gradientes de temperaturas en las direcciones x e y no son muy diferentes, entonces $\Delta x = \Delta y = l$, entonces, se puede simplificar la expresión anterior en:

$$T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} + \frac{\dot{e}_{m,n} l^2}{k} = 0 \quad (3.6.13)$$

La formulación en diferencias finitas de un nodo interior se obtiene al sumar las temperaturas de los cuatro vecinos más cercanos del nodo, menos el cuádruplo de la temperatura del propio nodo y más el término de generación de calor. Que expresada de otra forma más simple sería:

$$T_{\text{izquierda}} + T_{\text{superior}} + T_{\text{derecha}} + T_{\text{inferior}} - 4T_{\text{nodo}} + \frac{\dot{e}_{\text{nodo}} l^2}{k} = 0 \quad (3.6.14)$$

Al no existir generación de calor en el medio, se deduce que la temperatura de cada nodo interior es el promedio aritmético de las temperaturas de los cuatro nodos vecinos. Para la transferencia de calor estacionaria la ecuación básica que se debe tener presente al escribir un balance de energía sobre un elemento de volumen es:

$$\sum \dot{Q} + \dot{e}V_{\text{elemento}} = 0 \quad (3.6.15)$$

En la expresión anterior se supone que toda la transferencia de calor es hacia el elemento de volumen desde todas las superficies excepto para un flujo de calor cuya dirección ya está determinada.

Como en nuestro caso la temperatura cambia con el tiempo así como con la posición, nuestro problema requiere la variable tiempo. Seleccionando un intervalo de tiempo apropiado Δt y resolver para las temperaturas nodales desconocidas varias veces para cada Δt hasta obtener la solución en el instante deseado. La elección de un Δt pequeño aumenta la precisión en el cálculo pero aumenta el tiempo de resolución.

Como índice o contador de los intervalos de tiempo, correspondiendo con $p = 0$ a la condición inicial específica. La correspondencia con el intervalo de tiempo apropiado será $t_i = p\Delta t$, empleándose la notación T_m^p representando así la temperatura del nodo m en el intervalo de tiempo p .

La formulación de los problemas de conducción de calor en régimen transitorio difiere de las del estado permanente en que los primeros comprende un término adicional que representa el cambio en el contenido de energía en el medio con el tiempo.

Por conveniencia se supone que toda la transferencia de calor es hacia el elemento pudiéndose expresar el balance de energía sobre el elemento de volumen durante el intervalo de tiempo Δt :

(Calor transferido hacia el elemento de volumen desde todas sus superficies durante Δt)

+

(Calor generado dentro del elemento de volumen durante Δt)

=

(Cambio en el contenido de la energía interna del elemento del volumen durante Δt)

$$\Delta t \sum_{\substack{\text{Todos} \\ \text{los} \\ \text{lados}}} \dot{Q} + \Delta t \dot{E}_{\text{gen,elemento}} = \Delta E_{\text{elemento}} \quad (3.6.16)$$

Expresión en la que la razón de la transferencia de calor \dot{Q} , es formada por la conducción para los nodos interiores y puede comprender también la convección, flujo de calor y radiación para los nudos de frontera.

Como:

$$\Delta E_{\text{elemento}} = mc_p \Delta T = \rho V_{\text{elemento}} c_p \Delta T \quad (3.6.17)$$

Donde ρ es la densidad y c_p el calor específico del elemento, al dividir la relación anterior entre Δt , nos queda:

$$\sum_{\substack{\text{Todos} \\ \text{los} \\ \text{lados}}} \dot{Q} + \dot{E}_{\text{gen,elemento}} = \frac{\Delta E_{\text{elemento}}}{\Delta t} = \rho V_{\text{elemento}} c_p \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (3.6.18)$$

Que para cualquier nodo m en el medio y su elemento de volumen tenemos:

$$\sum_{\substack{\text{Todos} \\ \text{los} \\ \text{lados}}} \dot{Q} + \dot{E}_{\text{gen,elemento}} = \rho V_{\text{elemento}} c_p \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} \quad (3.6.19)$$

Donde T_m^p y T_m^{p+1} son la temperaturas del nodo m en los instantes $t_p = p\Delta t$ y

$t_{p+1} = (p+1)\Delta t$, respectivamente y $T_m^{p+1} - T_m^p$ representa el cambio de temperatura del

nodo durante el intervalo de tiempo Δt entre los intervalos de tiempo p e $p+1$.

Cuando $T_m^{p+1} = T_m^p$ (No hay cambio de la temperatura con el tiempo), la formulación se reduce al estado estacionario anteriormente vista.

Al considerar un cuerpo bidimensional dividido en incrementos como se muestra en la figura 3.1

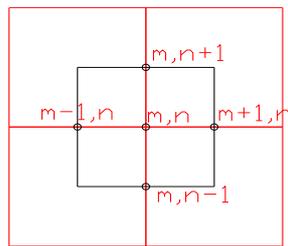


FIGURA 3.1

Donde el subíndice m denota la posición x , y el subíndice n la posición y , donde las distancias entre el punto (m,n) y los puntos $(m+1,n)$ y $(m-1,n)$ es Δx y la distancia entre el punto (m,n) y los puntos $(m,n-1)$ y $(m,n+1)$ es Δy .

Como la ecuación del flujo de calor en el interior del sólido suponiendo propiedades constantes es:

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.6.20)$$

Se puede aproximar a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} (T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p - 2T_{m,n}^p) \quad (3.6.21)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2} (T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p - 2T_{m,n}^p) \quad (3.6.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (3.6.23)$$

Que sustituyendo en la ecuación nos da:

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} (T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p - 2T_{m,n}^p) + \frac{1}{(\Delta y)^2} (T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p - 2T_{m,n}^p) = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (3.6.24)$$

Conociéndose así las temperaturas de los distintos nodos en un instante determinado, las temperaturas después de un incremento de tiempo Δt puede calcularse escribiendo una ecuación semejante para cada nodo y obteniendo los valores de $T_{m,n}^{p+1}$, repitiéndose el procedimiento para obtener la distribución después de los incrementos de tiempos que se desee.

Si se resuelve para la temperatura nodal en el tiempo nuevo (p+1) y suponiendo que $\Delta x = \Delta y$, se sigue que:

$$T_{m,n}^{p+1} = Fo(T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + (1 - 4Fo)T_{m,n}^p \quad (3.6.25)$$

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = \text{forma en diferencias finitas en expresar el número de Fourier.} \quad (3.6.26)$$

Para sistemas unidimensionales en x, la forma explícita de la ecuación en diferencias finitas para un nodo interior m se reduce a:

$$T_m^{p+1} = Fo(T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) + (1 - 2Fo)T_m^p \quad (3.6.27)$$

Estas dos ecuaciones tanto para sistemas unidimensionales como bidimensionales son explícitas ya que las temperaturas nodales desconocidas para el tiempo nuevo se determinan de manera exclusiva mediante temperaturas nodales conocidas en el tiempo anterior. Siendo el cálculo de las temperaturas desconocidas directo. Como se conoce la temperatura de cada nodo interior en $t=0$ ($p=0$) de las condiciones iniciales establecidas, los cálculos comienzan en $t = \Delta t$ ($p=1$), aplicando a cada nodo interior las ecuaciones anteriores para determinar su temperatura. Con temperaturas conocidas para $t = \Delta t$, la

ecuación en diferencias finitas aproximada se aplica entonces a cada nodo para determinar su temperatura en $t = 2\Delta t$ ($p=2$), así, la distribución transitoria de temperaturas se obtiene al avanzar en el tiempo, con el uso de los intervalos de Δt . Donde la elección de Δx y Δy se basa en el compromiso entre la precisión y los requerimientos de cálculo y Δt se elige debido a criterios de estabilidad.

Para evita errores el valor establecido de Δt debe mantenerse por debajo de cierto límite que depende de Δx y Δy así como de los parámetros del sistema de estudio. Para solventar la dependencia de estabilidad se establece el criterio de estabilidad que o bien se obtiene matemáticamente o mediante una argumentación termodinámica. El criterio se determina requiriendo que el coeficiente asociado con el nodo de interés en el tiempo anterior sea mayor que o igual a cero. Para ello se reúnen todos los términos que incluyen $T_{m,n}^p$ para obtener la forma del cociente, obteniendo así una relación límite que incluya Fo , del cual se determina el máximo valor permitido para Δt .

Para las expresiones anteriores, siguiendo este criterio de estabilidad para un nodo es:

$$(1 - 2Fo) \geq 0 \quad Fo \leq \frac{1}{2} \quad (3.6.28)$$

Para el caso unidimensional y,

$$(1 - 4Fo) \geq 0 \quad Fo \leq \frac{1}{4} \quad (3.6.29)$$

Para los valores establecidos de Δx y α , estos criterios sirven para determinar límites superiores al valor de Δt .

Al aplicar el método del balance de energía a un volumen de control alrededor del nodo interior, la ecuación del balance se puede expresar:

$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{alm} \quad (3.6.30)$$

Con el interés de adoptar una metodología congruente, se supone que todo el flujo de calor está adentro del nudo.

Si consideramos un nodo superficial de un sistema unidimensional para determinar más precisamente las condiciones térmicas cerca de la superficie, a este nodo se le asigna un

espesor de la mitad del que tienen los nodos interiores. Al suponer transferencia por convección desde un fluido contiguo y ninguna generación, se le sigue que:

$$hA(T_{\infty} - T_0^p) + \frac{kA}{\Delta x}(T_1^p - T_0^p) = \rho c A \frac{\Delta x}{2} \frac{T_0^{p+1} - T_0^p}{\Delta t} \quad (3.6.31)$$

Resolviendo para la temperatura superficial en $t + \Delta t$, tenemos:

$$T_0^{p+1} = \frac{2h}{\rho c \Delta x}(T_{\infty} - T_0^p) + \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(T_1^p - T_0^p) + T_0^p \quad (3.6.32)$$

Considerando que:

$$\frac{2h\Delta t}{\rho c \Delta x} = \frac{2h\Delta x}{k} \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = 2BiFo \quad (3.6.33)$$

$$Bi = \frac{h\Delta x}{k} = \text{forma en diferencias finitas del número Biot} \quad (3.6.34)$$

Al reagrupar términos que incluyen T_0^p se tiene:

$$T_0^{p+1} = 2Fo(T_1^p + BiT_{\infty}) + (1 - 2Fo - 2BiFo)T_0^p \quad (3.6.35)$$

Aplicando el criterio de estabilidad tenemos que para el coeficiente de T_0^p

Sea mayor o igual a cero:

$$1 - 2Fo - 2BiFo \geq 0 \quad (3.6.36)$$

$$Fo(1 + Bi) \leq \frac{1}{2} \quad (3.6.37)$$

Ecuación que debe de contrastarse con la ecuación

$$Fo \leq \frac{1}{2} \quad (3.6.38)$$

Para estimar cual es el requisito más riguroso.

Como $Bi \geq 0$, es evidente que el valor límite de Fo para la ecuación (3.6.37) es menor que el de la ecuación (3.6.38), por lo que para asegurar la estabilidad en todos los nodos hay que usar la ecuación (3.6.37) a fin de seleccionar el valor máximo permisible de Fo , y de aquí Δt , para ser utilizado en los cálculos.

En el método de diferencias finitas explícito, la temperatura de cualquier nodo en $t + \Delta t$ se calcula a partir del conocimiento de temperaturas en el mismo nodo y de los nodos vecinos para el tiempo anterior t . Para la determinación de una temperatura nodal en algún tiempo es independiente de la temperatura de los otros nodos para el mismo tiempo. El método es fácil al cálculo tiene la limitación de Δt , para un incremento de espacio dado, el intervalo de tiempo debe de ser compatible con el requisito de estabilidad, esto puede dar lugar a valores pequeños de Δt necesitándose un número muy grande de intervalos de tiempo para la obtención de la ecuación, esto se puede reducir aplicando el método de diferencias finitas por el método implícito.

Para aplicar el método implícito se aproxima la derivada respecto del tiempo mientras se estiman todas las temperaturas en el nuevo tiempo $(p+1)$, en lugar del tiempo anterior (p) . A diferencia de la ecuación para la forma explícita (diferencia hacia atrás para la derivada respecto al tiempo), la forma implícita toma la forma para un sistema bidimensional:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.6.39)$$

Si $\Delta x = \Delta y$ se tiene ordenando términos que:

$$(1 + 4Fo)T_{m,n}^{p+1} - Fo(T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) = T_{m,n}^p \quad (3.6.40)$$

De esta ecuación se tiene que la temperatura nueva del nodo m,n depende de las temperaturas nuevas de sus nodos contiguos que, en general, se desconocen, lo que para determinar las temperaturas nodales desconocidas en $t + \Delta t$, las ecuaciones deben resolverse simultáneamente aplicándose Gauss-seidel o inversión de matrices, la solución consecutiva implicaría entonces resolver de forma simultánea las ecuaciones nodales en cada tiempo $t = \Delta t, 2\Delta t, \dots$, hasta que se alcanza el tiempo final deseado. Como ventaja el método implícito es estable sin condiciones, es decir, la solución permanece estable para todos los intervalos de espacio y tiempo, no habiendo restricciones en Δx y Δt , no obstante, para maximizar la precisión, Δt debe de ser

suficientemente pequeño para asegurar que los resultados son independientes de reducciones adicionales en su valor.

La formulación implícita también puede derivarse del método del balance de energía, para un nodo sometido a convección, tenemos:

$$(1 + 2Fo + 2FoBi)T_0^{p+1} - 2FoT_1^{p+1} = 2FoBiT_\infty + T_0^p \quad (3.6.41)$$

Para cualquier nodo interior, tendremos:

$$(1 + 2Fo)T_m^{p+1} - Fo(T_{m-1}^{p+1} + T_{m+1}^{p+1}) = T_m^p \quad (3.6.42)$$

3.6.2. FORMULACIÓN DE LA RESISTENCIA TÉRMICA Y CAPACIDADES TÉRMICAS.

Cada elemento de volumen puede verse como un nodo que está conectado a sus vecinos adyacentes por medio de resistencia térmicas. En régimen estacionario la transferencia neta de energía al nodo es cero, mientras que en el régimen transitorio la transferencia neta de energía al nodo debe hacerse patente como un incremento de la energía interna del elemento. Cada elemento de volumen se comporta como una “capacidad global” y la iteración de todos los elementos determina el comportamiento del sólido durante el proceso transitorio. Si la energía interna del nodo i puede expresarse en función del calor específico y de la temperatura, entonces su variación con el tiempo se aproxima por:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \rho c \Delta v \frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta t} \quad (3.6.43)$$

Donde Δv es el elemento de volumen.

Si se define la capacidad térmica como:

$$C_i = \rho_i c_i \Delta v_i \quad (3.6.44)$$

Entonces, la formulación general resistencia-capacidad del balance de energía en un nodo es:

$$q_i + \sum_j \frac{T_j^p - T_i^p}{R_{i,j}} = C_i \frac{T_i^{p+1} - T_i^j}{\Delta t} \quad (3.6.45)$$

El uso de los conceptos de resistencias y capacidad térmicas permite escribir la ecuación en diferencias hacia delante para todos los nodos y las condiciones de contorno en la forma simple y compacta.

Para generar una relación explícita la podemos obtener a partir de:

$$q_i + \sum_j \frac{T_j^{p+1} - T_i^{p+1}}{R_{i,j}} = C_i \frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta t} \quad (3.6.46)$$

Si la solución se efectúa con la técnica de iteración de Gauss-Seidel, entonces, para T_i^{p+1} se expresa como:

$$T_i^{p+1} = \frac{q_i + \sum_j \left(\frac{T_j^{p+1}}{R_{i,j}} \right) + \left(\frac{C_i}{\Delta t} \right) T_i^p}{\sum_j \left(\frac{1}{R_{i,j}} \right) + \frac{C_i}{\Delta t}} \quad (3.6.47)$$

Observemos que si $\Delta t \rightarrow \infty$, la ecuación se hace

$$T_i^{p+1} = \frac{q_i + \sum_j \left(\frac{T_j^{p+1}}{R_{i,j}} \right)}{\sum_j \left(\frac{1}{R_{i,j}} \right)} \quad (3.6.48)$$

La condición de estabilidad para la formulación explícita se puede examinar resolviendo la ecuación (3.6.45) en T_i^{p+1}

$$T_i^{p+1} = \left(q_i + \sum_j \frac{T_j^p}{R_{i,j}} \right) \frac{\Delta t}{C_i} + \left(1 - \frac{\Delta t}{C_i} \sum_j \frac{1}{R_{i,j}} \right) T_i^p \quad (3.6.49)$$

El valor de q_i puede influir en la estabilidad pero se puede elegir un valor seguro observando el comportamiento de la ecuación para $q_i = 0$, que empleando el mismo tipo de argumentación anterior, como el coeficiente de T_i^p no puede ser negativo, la condición mínima de estabilidad es:

$$1 - \frac{\Delta t}{C_i} \sum_j \frac{1}{R_{i,j}} \geq 0 \quad (3.6.50)$$

Para resolver un problema numérico complicado con diversas condiciones de contorno y con valores no uniformes de los incrementos espaciales, etc, una vez que se ha formulado todas las resistencias y capacidades de los nodos, se tiene la tarea de elegir el incremento de tiempo Δt , que se pueda emplear en el cálculo, para mantener la estabilidad se tiene que mantener Δt igual o menor que el valor obtenido a partir de la relación nodal más restrictiva, lo que nos da como solución:

$$T_i^{p+1} = \frac{\Delta t}{C_i} \left(q_i + \sum_j \frac{T_j^p - T_i^p}{R_{i,j}} \right) + T_i^p \quad (3.6.51)$$

Esta formulación también es capaz de adaptarse fácilmente a las variaciones de las propiedades con la temperatura, sólo se necesita estimar los valores apropiados de ρ, c, k , para incluirlos en C_i y $R_{i,j}$, dependiendo de la naturaleza del problema y de la precisión exigida. También puede ser necesario estimar nuevos valores de C_i y $R_{i,j}$, para cada incremento de tiempo.